KHẢO SÁT CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI THÊM VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP

Nguyễn Hữu Luân[1]
Trương Minh Đức[1]

TÓM TẮT

Trong bài báo cáo này, chúng tôi khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp. Bằng việc sử dụng điều kiện nén tổng và nén hiệu hai mode, chúng tôi thu được kết quả trạng thái này là một trạng thái có nén tổng nhưng không nén hiệu. Tiếp theo chúng tôi khảo sát tính chất phản kết chùm hai mode và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz của trạng thái này. Kết quả cho thấy, trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp có tính chất phản kết chùm và hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz. Sau đó chúng tôi khảo sát tính đan rối của trạng thái theo hai tiêu chuẩn Hillery - Zubairy và Hyunchul Nha - Jeawan Kim. Kết quả thu được, trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp hoàn toàn đan rối theo hai tiêu chuẩn này.

Từ khóa: *Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, phản kết chùm, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, đan rối theo tiêu chuẩn Hillery - Zubairy, đan rối theo tiêu chuẩn Hyunchul Nha - Jeawan Kim.*

1. Giới thiệu

Việc tạo ra các trạng thái phi cổ điển của trường điện từ được các nhà khoa học rất quan tâm, điển hình là trạng thái nén, trạng thái kết hợp, đây là các trạng thái phi cổ điển vì chúng tuân theo các tính chất phi cổ điển. Vào năm 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng về trạng thái kết hợp thêm photon [1] và cũng đã chứng minh được nó là một trạng thái phi cổ điển. Việc thêm photon hoặc bớt photon vào một trạng thái vật lý là một phương pháp quan trọng để tạo ra một trạng thái phi cổ điển mới. Trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp có dạng

$$\left|\psi\right\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{b}\right)\left|\alpha\right\rangle_{a}\left|\beta\right\rangle_{b}, \quad (1)$$

trong đó $N_{\alpha\beta} = \left(\sqrt{1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\,\mathrm{Re}[\alpha\beta]}\right)^{-1}$ là hệ số chuẩn hóa, $\hat{a}^{\dagger}$ và $\hat{b}$ lần lượt là toán tử sinh đối với mode a và toán tử hủy đối với mode b.

Việc khảo sát phi tính chất cổ điển của trạng thái thêm photon đã được tác giả Nguyễn Thanh Pháp [2] nghiên cứu, và tính đan rối hai mode kết hợp của trạng thái bớt photon đã được tác giả Nguyễn Hải Chung [3] nghiên cứu. Tuy nhiên việc nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt một

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế
Email: tmduc2009@gmail.com

photon lên hai mode kết hợp vẫn chưa được đề cập đến. Vì vậy trong bài báo này chúng tôi tiến hành khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp.

2. Khảo sát tính chất nén của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp

2.1. Nén tổng hai mode

Nén tổng hai mode được Hillery [4] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén tổng nếu

$$\left\langle \left(\Delta \hat{V}_\varphi\right)^2 \right\rangle - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right) < 0, \tag{2}$$

Với $\left\langle \left(\Delta \hat{V}_\varphi\right)^2 \right\rangle = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2$. Ta viết lại (2) như sau:

$$\left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right) < 0, \tag{3}$$

trong đó $\hat{V}_\varphi = \left(e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt

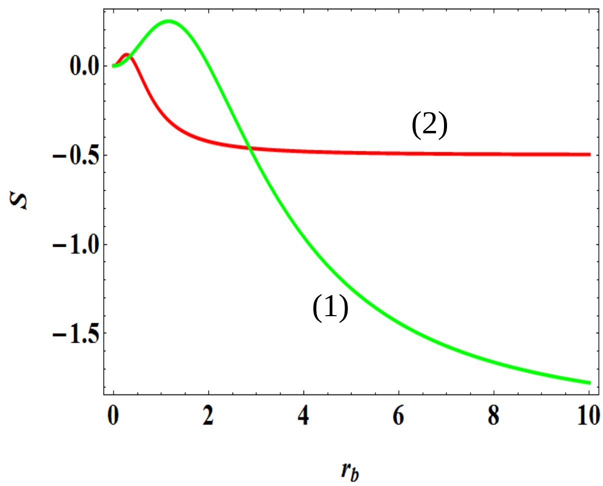
$$S = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right). \tag{4}$$

Đối với trạng thái $\left|\psi\right\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{b}\right)\left|\alpha\right\rangle_a \left|\beta\right\rangle_b$ ta có

$$\begin{aligned} S = {} & \left[4\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha\beta+\alpha^*\beta^*\right)\right]^{-1} \times \Big[\left(e^{i2\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*2}+e^{-i2\varphi}\alpha^2\beta^2\right)\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+3\right) \\ & +\left(e^{i2\varphi}\alpha^{*3}\beta^{*3}+e^{-i2\varphi}\alpha^3\beta^3\right)+\left(e^{i2\varphi}\alpha^*\beta^*+e^{-i2\varphi}\alpha\beta\right)\left(|\alpha|^2+2\right)|\beta|^2 \\ & +2\left(|\alpha|^4+3|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2+2|\alpha|^2|\beta|^4+2|\beta|^2\left(|\alpha|^2+1\right)\left(\alpha\beta+\alpha^*\beta^*\right)\Big] \\ & -\Big\{\left[2\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha\beta+\alpha^*\beta^*\right)\right]^{-1} \times \Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\left(e^{i\varphi}\alpha^*\beta^*+e^{-i\varphi}\alpha\beta\right) \\ & +\left(e^{i\varphi}\alpha^{*2}\beta^{*2}+e^{-i\varphi}\alpha^2\beta^2\right)+\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2\Big]\Big\}^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp\left(i\varphi_a\right)$, $\beta = r_b \exp\left(i\varphi_b\right)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, đồng thời thay vào công thức (5) và tiến hành khảo sát ta được

$$\begin{aligned}
S = &\left[4\left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b\cos(\varphi_a+\varphi_b)\right)\right]^{-1}\times\left[2r_a^2r_b^2\left(r_a^2+r_b^2+3\right)\cos(4\varphi_b)\right.\\
&+2r_a^3r_b^3\cos(\varphi_A+5\varphi_B)+2r_ar_b^3\left(r_a^2+2\right)\cos(\varphi_A-3\varphi_B)+2\left(r_a^4+3r_a^2+1\right)r_b^2\\
&\left.+2r_a^2r_b^4+4r_ar_b^3\left(r_a^2+1\right)\cos(\varphi_A+\varphi_B)\right] \qquad (6)\\
&-\left\{\left[2\left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b\cos(\varphi_a+\varphi_b)\right)\right]^{-1}\times\left[2r_ar_b\left(r_a^2+r_b^2+2\right)\cos(2\varphi_b)\right.\right.\\
&\left.\left.+2r_a^2r_b^2\cos(\varphi_A+3\varphi_B)+2r_b^2\left(r_a^2+1\right)\cos(\varphi_A-\varphi_B)\right]\right\}^2
\end{aligned}$$



Hình 1: *Đồ thị khảo sát nén tổng của trạng thái thêm và bớt một photon (đường (1)) với trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp(đường (2)).*

Đồ thị hình 1 khảo sát với các điều kiện là $r_a = 2r_b$, $\varphi_a = \varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$. Kết quả cho thấy rằng, trạng thái thêm và bớt một photon thể hiện nén tổng mạnh hơn trạng thái thêm một photon.

2.2. Nén hiệu hai mode

Nén hiệu hai mode được Hillery [4] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén hiệu nếu

$$\left\langle\left(\Delta\hat{W}_\varphi\right)^2\right\rangle-\frac{1}{4}\left(\hat{n}_a-\hat{n}_b\right)<0, \qquad (7)$$

Với $\left\langle\left(\Delta\hat{W}_\varphi\right)^2\right\rangle=\left\langle\hat{W}_\varphi^2\right\rangle-\left\langle\hat{W}_\varphi\right\rangle^2$. Ta viết lại (7) như sau:

$$\left\langle\hat{W}_\varphi^2\right\rangle-\left\langle\hat{W}_\varphi\right\rangle^2-\frac{1}{4}\left(\hat{n}_a-\hat{n}_b\right)<0, \qquad (8)$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt

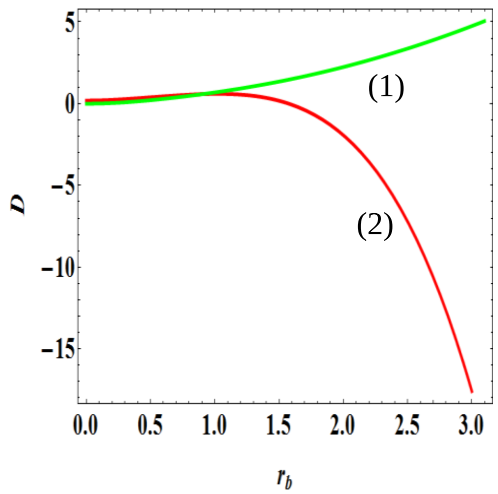
$$D = \left\langle \hat{W}_{\varphi}^{2} \right\rangle - \left\langle \hat{W}_{\varphi} \right\rangle^{2} - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a - \hat{n}_b\right), \tag{9}$$

trong đó $\hat{W}_{\varphi} = \left(e^{i\varphi}\hat{a}\hat{b}^{\dagger} + e^{-i\varphi}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}\right), \hat{n}_a = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}, \hat{n}_b = \hat{b}^{\dagger}\hat{b}.$ Đối với trạng thái $\left|\psi\right\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{b}\right)\left|\alpha\right\rangle_a \left|\beta\right\rangle_b$ ta có

$$\begin{aligned} D = &\left[4\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha^*\beta^*+\alpha\beta\right)\right]^{-1} \\ &\times\left[\left(|\alpha|^2+2\right)\left(e^{2i\varphi}\alpha\beta^{*3}+e^{-2i\varphi}\alpha^*\beta^3\right)+\left(2|\alpha|^2|\beta|^2+4|\beta|^2\right)\left(\alpha^*\beta^*+\alpha\beta\right)\right. \\ &+\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+3\right)\left(e^{2i\varphi}\alpha^2\beta^{*2}+e^{-2i\varphi}\alpha^{*2}\beta^2\right)+\left(e^{2i\varphi}\alpha^3\beta^*+e^{-2i\varphi}\alpha^{*3}\beta\right)|\beta|^2 \\ &\left.+2|\alpha|^2|\beta|^4+8|\alpha|^2|\beta|^2+2|\alpha|^4|\beta|^2+2|\beta|^4+4|\beta|^2\right] \\ &-\left\{\left[2\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha^*\beta^*+\alpha\beta\right)\right]^{-1}\times\left[\left(e^{i\varphi}\alpha^2+e^{-i\varphi}\alpha^{*2}\right)|\beta|^2\right.\right. \\ &\left.\left.+\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\left(e^{i\varphi}\alpha\beta^*+e^{-i\varphi}\alpha^*\beta\right)+\left(|\alpha|^2+1\right)\left(e^{i\varphi}\beta^{*2}+e^{-i\varphi}\beta^2\right)\right]\right\}^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp\left(i\varphi_a\right), \beta = r_b \exp\left(i\varphi_b\right)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, đồng thời thay vào công thức (10) và tiến hành khảo sát ta được

$$\begin{aligned} D = &\left[4\left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right)\right)\right]^{-1}\times\left[\left(r_a^2+r_b^2+3\right)2r_a^2r_b^2 cos\left(4\varphi_a-4\varphi_b\right)\right. \\ &+\left(r_a^2+2\right)2r_ar_b^3 cos\left(3\varphi_a-5\varphi_b\right)+\left(2r_a^2r_b^2+4r_b^2\right)2r_ar_b cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right) \\ &\left.+2r_a^3r_b^3 cos\left(5\varphi_a-3\varphi_b\right)+2r_a^2r_b^4+8r_a^2r_b^2+2r_a^4r_b^2+2r_b^4+4r_b^2\right] \\ &-\left\{\left[2\left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b cos\left(\varphi_a+\varphi_b\right)\right)\right]^{-1}\times\left[2r_ar_b\left(r_a^2+r_b^2+2\right)cos\left(2\varphi_a-2\varphi_b\right)\right.\right. \\ &\left.\left.+2r_a^2r_b^2 cos\left(3\varphi_a-\varphi_b\right)+2r_b^2\left(r_a^2+1\right)cos\left(\varphi_a-3\varphi_b\right)\right]\right\}^2. \end{aligned}$$



Hình 2: *Đồ thị khảo sát nén hiệu của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường (1)) và trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp (đường (2))*

Đồ thị hình 2 khảo sát nén hiệu của trạng thái theo biên độ r_b và pha dao động φb với điều kiện khảo sát là $r_a = 2r_b$, $\varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{3}$. Đồ thị cho thấy, trong cùng một điều kiện khảo sát nhưng tính chất nén hiệu của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp không thể hiện.

3. Khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp

3.1 Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy – Schwaz cho trường hợp hai mode là

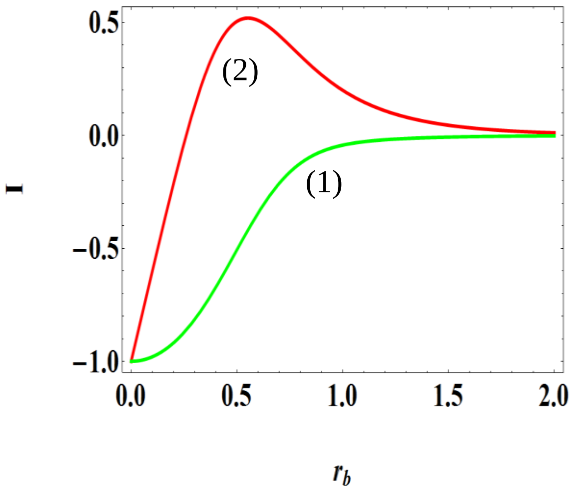
$$I = \frac{\left[\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^{2}\right\rangle\left\langle \hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}}{\left|\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{a}\right\rangle\right|} - 1 \geq 0 \tag{11}$$

Sự vi phạm bất đẳng thức xảy ra khi I < 0. Đối với trạng thái thái thêm và bớt một photon ta thu được kết quả sau

$$\begin{aligned} I = &\left\{\left[|\alpha|^6 + 5|\alpha|^4 + 4|\alpha|^2 + 2\left(|\alpha|^2 + 2\right)|\alpha|^2 \operatorname{Re}(\alpha\beta) + |\alpha|^4|\beta|^2\right]\right. \\ &\times\left.\left[\left(|\alpha|^2 + 1\right) + 2\operatorname{Re}(\alpha\beta) + |\beta|^2\right]\right\}^{1/2} \\ &\times\left[\left(|\alpha|^4 + 3|\alpha|^2 + 1\right) + 2\left(|\alpha|^2 + 1\right)\operatorname{Re}(\alpha\beta) + |\alpha|^2|\beta|^2\right]^{-1} - 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$, đồng thời thay vào công thức (12) và tiến hành khảo sát ta được

$$I = \left\{\left[r_a^6 + 5r_a^4 + 4r_a^2 + 2r_a^3 r_b\left(r_a^2+2\right)\cos\varphi + r_a^4 r_b^2\right] \times \left[\left(r_a^2+1\right) + 2r_a r_b \cos\varphi + r_b^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \times \left[\left(r_a^4 + 3r_a^2 + 1\right) + 2r_a r_b\left(r_a^2+1\right)\cos\varphi + r_a^2 r_b^2\right]^{-1} - 1 \quad (13)$$



Hình 3: *Đồ thị khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz của trạng thái thêm và bớt một photon (đường (1)) và trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp (đường (2))*

Đồ thị hình 3 khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz của trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp (đường (2)) và trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường (1)) theo r_b và với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b$, $0 \le r_b \le 2$, và $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Đồ thị cho thấy rằng, trong cùng một điều kiện khảo sát cả hai trạng thái đều vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Tuy nhiên, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ở trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp là mạnh hơn trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp.

3.2. Tính phản kết chùm

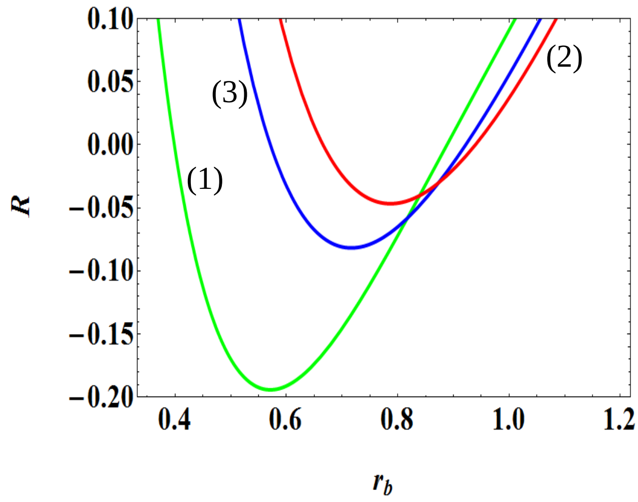
Tính phản kết chùm được Ching Tsung Lee [5] đưa ra vào năm 1990. Điều kiện để tồn tại tính phản kết chùm là

$$R_{ab}(1,m) = \frac{\left\langle \hat{n}_a^{(1+1)} \hat{n}_b^{(m-1)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(m-1)} \hat{n}_b^{(1+1)} \right\rangle}{\left\langle \hat{n}_a^{(1)} \hat{n}_b^{(m)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(m)} \hat{n}_b^{(1)} \right\rangle} - 1 < 0, \quad (14)$$

với $\ell \geq m \geq 0; \ell, m$ là số nguyên và $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. Sử dụng các tính chất của các toán tử $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ và $\left[\hat{b}, \hat{b}^\dagger\right] = 1$ đối với mode a và mode b, ta chứng minh được

$$\begin{aligned} R_{ab}(\ell, m) = \Big[& \left(|\alpha|^{2(\ell+2)} + (2\ell+3)|\alpha|^{2(\ell+1)} + (\ell+1)^2 |\alpha|^{2\ell}\right)|\beta|^{2(m-1)} \\ & + \left(|\alpha|^{2(\ell+1)} + (\ell+1)|\alpha|^{2\ell}\right)|\beta|^{2(m-1)} 2\mathrm{Re}[\alpha\beta] + |\alpha|^{2(\ell+1)}|\beta|^{2m} \\ & + \left(|\alpha|^{2m} + (2m-1)|\alpha|^{2(m-1)} + (m-1)^2 |\alpha|^{2(m-2)}\right)|\beta|^{2(\ell+1)} \\ & + \left(|\alpha|^{2(m-1)} + (m-1)|\alpha|^{2(m-2)}\right)|\beta|^{2(\ell+1)} 2\mathrm{Re}[\alpha\beta] + |\alpha|^{2(m-1)}|\beta|^{2(\ell+2)} \Big] \\ & \times \Big[\left(|\alpha|^{2(\ell+1)} + (2\ell+1)|\alpha|^{2\ell} + \ell^2 |\alpha|^{2(\ell-1)}\right)|\beta|^{2m} + \left(|\alpha|^{2\ell} + \ell|\alpha|^{2(\ell-1)}\right)|\beta|^{2m} 2\mathrm{Re}[\alpha\beta] \\ & + |\alpha|^{2\ell}|\beta|^{2(m+1)} + \left(|\alpha|^{2(m+1)} + (2m+1)|\alpha|^{2m} + m^2 |\alpha|^{2(m-1)}\right)|\beta|^{2\ell} \\ & + \left(|\alpha|^{2m} + m|\alpha|^{2(m-1)}\right)|\beta|^{2\ell} 2\mathrm{Re}[\alpha\beta] + |\alpha|^{2m}|\beta|^{2(\ell+1)} \Big]^{-1} - 1. \end{aligned} \tag{15}$$

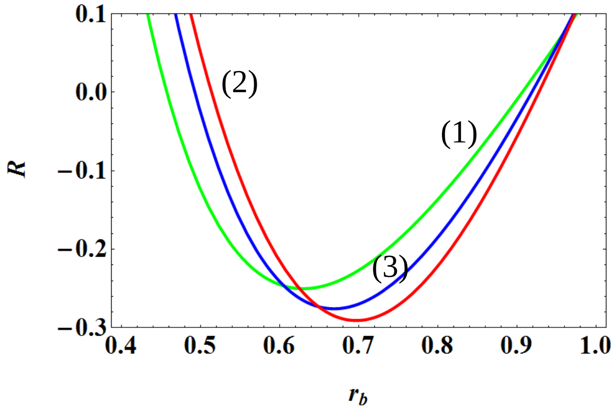
Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a), \beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$, đồng thời thay vào công thức (15). Kết quả khảo sát tính phản kết chùm của trạng thái này thể hiện thông qua các đồ thị sau:



Hình 4: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của $R_{ab}(2,2)$, $R_{ab}(3,3)$, $R_{ab}(4,4)$ theo biên độ r_b và pha dao động φ, các tham số được chọn theo thứ tự tương ứng với (1), (3), (2)*

Đồ thị hình 4 khảo sát tính phản kết chùm của trạng thái thêm và bớt một photon trong trường hợp $\ell = m$, cùng một điều kiện khảo sát là $r_a = r_b^2, \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Kết quả có được là

$R_{ab}(2,2) < R_{ab}(3,3) < R_{ab}(4,4)$. Như vậy khi ℓ, m càng tăng thì trạng thái thêm và bớt một photon thể hiện tính chất phản kết chùm càng yếu.



Hình 5: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của $R_{ab}(3,2)$, $R_{ab}(4,3)$, $R_{ab}(5,4)$ vào biên độ r_b và pha dao động φ. Các tham số được chọn theo thứ tự tương ứng với (1), (3) và (2)*

Đồ thị hình 5 khảo sát tính chất phản kết chùm của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp, trong trường hợp $\ell \neq m,$ và hiệu $\ell - m,$ tăng dần. Cụ thể ta xét cho các tham số $R_{ab}(3,2)$, $R_{ab}(4,2)$, $R_{ab}(5,2)$ với điều kiện khảo sát $r_a = r_b^2,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$. Từ đồ thị ta thấy khi hiệu $\ell - m$ tăng dần thì $R_{ab}(3,2) > R_{ab}(4,2) > R_{ab}(5,2)$. Như vậy, tính chất phản kết chùm của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp thể hiện càng mạnh khi hiệu $\ell - m$ càng tăng.

3.3. *Tính đan rối theo tiêu chuẩn Hillery - Zubairy*

Tiêu chuẩn đan rối Hillery - Zubairy [6] được đưa ra vào năm 2006 bởi Hillery và Zubairy. Hai ông đã đưa ra một lớp bất đẳng thức mà sự vi phạm của chúng chỉ ra sự hiện diện của đan rối trong các hệ hai mode dưới dạng

$$\left\langle \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{m} \hat{a}^{m} \left(\hat{b}^{\dagger}\right)^{n} \hat{b}^{n} \right\rangle - \left| \left\langle \hat{a}^{m} \left(\hat{b}^{\dagger}\right)^{n} \right\rangle \right|^{2} < 0. \quad (16)$$

Xét trường hợp m = n = 1, tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy được viết lại

$$\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b} \right\rangle - \left| \left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^{2} < 0. \quad (17)$$

Để thuận lợi cho việc khảo sát chúng tôi đặt R_H dưới dạng

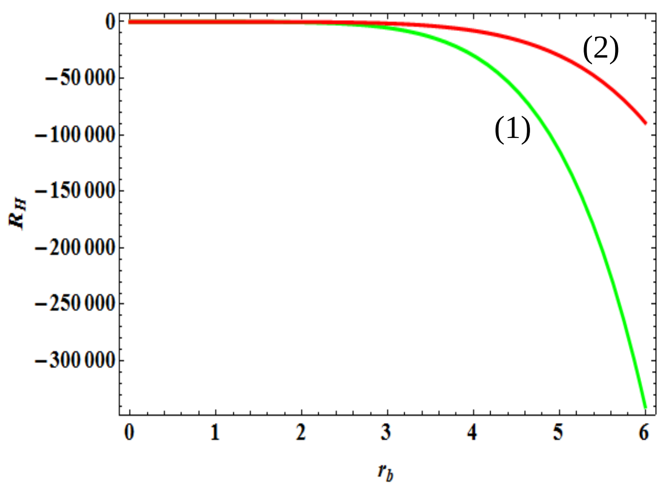
$$R_H = \left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b} \right\rangle - \left| \left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger} \right\rangle \right|^{2}.$$

Một trạng thái bất kỳ được gọi là trạng thái đan rối nếu $R_H < 0$, R_H càng âm thì mức độ đan rối càng tăng. Đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp ta có được

$$\begin{aligned}
R_H &= \left(|\alpha|^2+|\beta|^2+1+2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta\right]\right)^{-1}\times\Big[\left(|\alpha|^4+3|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2 \\
&\quad +\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2\,2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta\right]+|\alpha|^2|\beta|^4\Big]-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+1+2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta\right]\right)^{-2} \\
&\quad \times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)^2|\alpha|^2|\beta|^2+\left(|\alpha|^2+1\right)^2|\beta|^4+|\alpha|^4|\beta|^4 \\
&\quad +\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)|\alpha|^2|\beta|^2\,2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta\right]+\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2\,2\mathrm{Re}\left[\alpha\beta\right] \\
&\quad +\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2\,2\mathrm{Re}\left[\alpha^2\beta^2\right]\Big]
\end{aligned} \tag{18}$$

Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a + \varphi_b$, đồng thời thay vào (18) và khảo sát tham số R_H ta được

$$\begin{aligned}
R_H &= \left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b cos\varphi\right)^{-1}\times\left[\left(r_a^4+3r_a^2+1\right)r_b^2+2r_b^3\left(r_a^3+r_a\right)\cos\varphi+r_a^2r_b^4\right] \\
&\quad -\left(1+r_a^2+r_b^2+2r_ar_b cos\varphi\right)^{-2}\times\Big[\left(r_a^2+r_b^2+2\right)^2r_a^2r_b^2+\left(r_a^2+1\right)^2r_b^4 \\
&\quad +\left(r_a^2+r_b^2+2\right)\left(2r_a^3+r_a\right)2r_b^3\cos\varphi+\left(r_a^4+r_a^2\right)2r_b^4\cos 2\varphi+r_a^4r_b^4\Big]
\end{aligned}$$



Hình 6: *Đồ thị khảo sát tiêu chuẩn đan rối Hillery Zubairy của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp*

Đồ thị hình 6 khảo sát với điều kiện $\varphi = \frac{3\pi}{4}, r_a = r_b$ (đường (1)), $r_a = 0,8 r_b$ (đường (2)). Kết quả cho thấy tham số R_H luôn luôn có giá trị âm, tức trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp hoàn toàn đan rối theo tiêu chuẩn Hillery Zubairy. Đặc biệt khi r càng tăng thì R_H càng âm, nghĩa là tính đan rối xãy ra càng mạnh.

3.4. Tính đan rối theo tiêu chuẩn Hyunchul Nha - Jeawan Kim

Năm 2006, Hyunchul Nha - Jeawan Kim đã đưa ra tiêu chuẩn đan rối [7]. Một trạng thái gọi là đan rối khi thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
&\left[1-\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}-\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right]\\
&\times\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle-\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right]\\
&<\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle\right]^2+16\left[\frac{1}{2i}\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2-\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}\right\rangle+\frac{1}{4i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right]^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

Đặt tham số đan rối R_N dưới dạng

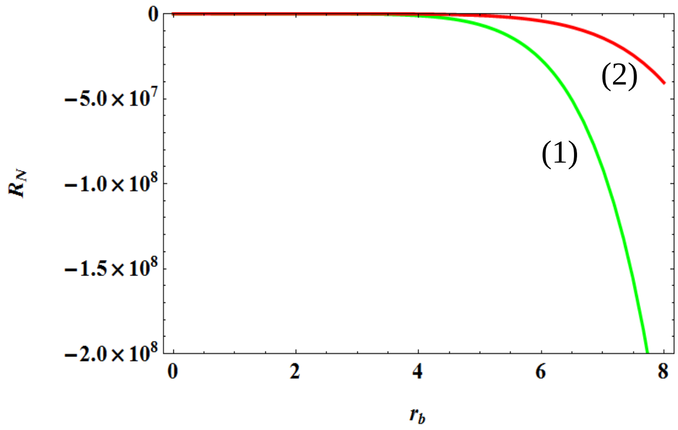
$$\begin{aligned}
R_N=&\left[1-\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}-\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right]\\
&\times\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2+\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle-\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^2\right]\\
&-\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle\right]^2-16\left[\frac{1}{2i}\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^2-\hat{a}^2\hat{b}^{\dagger 2}\right\rangle+\frac{1}{4i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right]^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Một trạng thái bất kỳ được gọi là trạng thái đan rối nếu $R_N < 0$, và R_N càng âm nghĩa là mức độ đan rối càng tăng. Đối với trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp ta có được

$$
\begin{aligned}
R_2 = \Big\{ & 1-\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-1}\times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+3\right)2\operatorname{Re}\left[\alpha^2\beta^{*2}\right] \\
& +\left(|\alpha|^2+2\right)2\operatorname{Re}\left[\alpha\beta^{*3}\right]+|\beta|^2 2\operatorname{Re}\left[\alpha^3\beta^*\right]-\left(2|\alpha|^2|\beta|^2+3|\beta|^2+|\alpha|^2+1\right)2\operatorname{Re}[\alpha\beta] \\
& -|\alpha|^2\left(|\beta|^4+|\beta|^2\right)-\left(2|\alpha|^4+7|\alpha|^2+3\right)|\beta|^2-\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^4-\left(|\alpha|^4+3|\alpha|^2+1\right)\Big] \\
& -4\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-2}\times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\operatorname{Im}\left[\alpha^*\beta\right]+|\beta|^2\operatorname{Im}\left[\alpha^{*2}\right] \\
& +\left(|\alpha|^2+1\right)\operatorname{Im}\left[\beta^2\right]\Big]^2\Big\}\times\Big\{1+\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-1} \\
& \times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+3\right)2\operatorname{Re}\left[\alpha^2\beta^{*2}\right]+\left(|\alpha|^2+2\right)2\operatorname{Re}\left[\alpha\beta^{*3}\right]+|\beta|^2 2\operatorname{Re}\left[\alpha^3\beta^*\right] \\
& +\left(2|\alpha|^2|\beta|^2+3|\beta|^2+|\alpha|^2+1\right)2\operatorname{Re}[\alpha\beta]+|\alpha|^2\left(|\beta|^4+|\beta|^2\right)+\left(2|\alpha|^4+7|\alpha|^2+3\right)|\beta|^2 \\
& +\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^4+\left(|\alpha|^4+3|\alpha|^2+1\right)\Big]-\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-2} \\
& \times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)2\operatorname{Re}\left[\alpha\beta^*\right]+\left(|\alpha|^2+1\right)2\operatorname{Re}\left[\beta^2\right]+|\beta|^2 2\operatorname{Re}\left[\alpha^2\right]\Big]^2\Big\} \\
& -\Big\{1+\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-1} \\
& \times\Big[|\alpha|^4+3|\alpha|^2+1+\left(2|\alpha|^2+1\right)|\beta|^2+|\beta|^4+\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+1\right)2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\Big]\Big\}^2 \\
& -16\Big\{\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-1}\times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+3\right)\operatorname{Im}\left[\alpha^{*2}\beta^2\right] \\
& +|\beta|^2\operatorname{Im}\left[\alpha^{*3}\beta\right]+\left(|\alpha|^2+2\right)\operatorname{Im}\left[\alpha^*\beta^3\right]\Big]+\left(1+|\alpha|^2+|\beta|^2+2\operatorname{Re}[\alpha\beta]\right)^{-2} \\
& \times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\operatorname{Re}\left[\alpha\beta^*\right]+\left(|\alpha|^2+1\right)\operatorname{Re}\left[\beta^2\right]+|\beta|^2\operatorname{Re}\left[\alpha^2\right]\Big] \\
& \times\Big[\left(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\right)\operatorname{Im}\left[\alpha^*\beta\right]+|\beta|^2\operatorname{Im}\left[\alpha^{*2}\right]+\left(|\alpha|^2+1\right)\operatorname{Im}\left[\beta^2\right]\Big]\Big\}^2
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Để đơn giản chúng ta đặt $\alpha = r_a \exp(i\varphi_a),\ \beta = r_b \exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, đồng thời thay vào (21) và khảo sát tham số R_N theo biên độ r_b và pha dao động φ với điều kiện

$$\varphi_a = 2\varphi_b,\ \varphi_b = \frac{\pi}{4}.$$



Hình 7: *Đồ thị khảo sát tiêu chuẩn đan rối Hyunchul Nha của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp. r_b = r_a (đường (1)), r_b = $0.8r_a$ (đường (2))*

Đồ thị hình 7 cho chúng ta nhận thấy, với điều kiện đã chọn thì trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp đan rối hoàn toàn theo tiêu chuẩn Hyunchul Nha - Jeawan Kim. Đặc biệt khi biên độ kết hợp rb càng tăng thì R_N càng âm, tức là sự đan rối xãy ra càng mạnh.

4. Kết luận

Trong bài báo cáo này, chúng tôi đã khảo sát tính chất nén tổng, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, tính phản kết chùm và tính đan rối của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp. Kết quả cho thấy, trạng thái hai mode kết hợp thêm và bớt một photon thể hiện tính chất nén tổng hai mode mạnh hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm một photon, tuy nhiên trạng thái này không có tính nén hiệu. Tương tự đối với sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp cũng thể hiện mạnh hơn trạng thái thêm một photon lên hai mode kết hợp. Đối với tính phản kết chùm, chúng tôi tiến hành khảo sát theo tham số tổng quát cho các trường hợp $\ell = m$ và hiệu số $\ell - m$ tăng dần. Kết quả khảo sát cho thấy, trong trường hợp $\ell = m$, khi ℓ và m tăng thì tính phản kết chùm của trạng thái càng yếu. Còn trường hợp khi $\ell - m$ tăng dần thì tính phản kết chùm thể hiện càng mạnh. Cuối cùng là chúng tôi khảo sát tính đan rối của trạng thái theo hai tiêu chuẩn Hillery Zubairy và tiêu chuẩn Hyunchul Nha - Jeawan Kim. Kết quả cho thấy, mức độ đan rối của trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp theo tiêu chuẩn Hyunchul Nha - Jeawan Kim và tiêu chuẩn Hillery-Zubairy là khá mạnh. Như vậy, trạng thái thêm và bớt một photon lên hai mode kết hợp là một trạng thái thể hiện tính chất phi cổ điển tương đối mạnh và có thể áp dụng vào thông tin lượng tử và máy tính lượng tử.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), Physical Review A, 43, 492

2. Nguyễn Thanh Pháp (2014), "Khảo sát các tính chất phi cổ điển của trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon", Luận văn thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế

3. Nguyễn Hải Chung (2012), "Khảo sát tính chất đan rối và viễn tải lượng tử với trạng thái kết hợp hai mode trừ photon", Luận văn thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế

4. Hillery. M. (1989), Physical Review A, 40, 3147

5. Lee. C. T. (1989), Physical Review A, 41, 1569

6. Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), Phys. Rev. A, 74(3), 032333

7. Hyunchul Nha and Jeawan Kim (2006), The American Physical Society, 74, 012317

THE NONCLASSICAL PROPERTIES OF THE ONE-PHOTON-ADDED AND ONE-PHOTON-SUBTRACTED TWO-MODE COHERENT STATE

ABSTRACT

This paper studies the nonclassical properties of the one-photon-added and one-photon-subtracted two-mode coherent state. The results show that such state occurs in the two-mode sum squeezing but does not occur in the two-mode difference squeezing. We also find the antibunching state and violation of the Cauchy-Schwarz inequality. Next, we also find that the one-photon-added and one-photon-subtracted two-mode coherent state completely entangles according to the Hillery - Zubairy and the Hyunchul Nha - Jeawan Kim entanglement criteria.

***Keywords**: Two-mode sum squeezing, two-mode difference squeezing, antibunching, violation of the Cauchy-Schwarz inequality, the Hillery – Zubairy entanglement criteria, the Hyunchul Nha - Jeawan Kim entanglement criteria*

(Received: 1/6/2017, Revised: 5/6/2017, Accepted for publication: 12/12/2017)